Fysikpapper för N1 | Andragradsekvationer

Lös ekvationen

$$x^2 + ax + b = 0$$

där a och b är kända konstanter och x är okänd. Lösningen kräver ett trick där vi utnyttjar egenskaperna hos en jämn kvadrat. Använd att

$$\left\{ x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right\}.$$

Som synes har vi både x och x^2 på vänstersidan av ekvationen och bara t (inne i kvadraten) på högersidan. Dessutom liknar vänstersidan ekvationen ovanför. Detta kan vi utnyttja. Om vi lägger till och drar ifrån $a^2/4$ så blir likheten ännu större:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b = 0$$

Vilket vi då kan skriva om som

$$(x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0$$

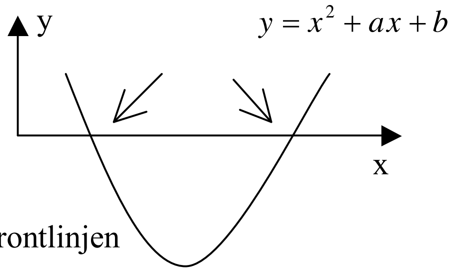
Nu är det genast mycket lättare att lösa ut x!

$$(x + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b \quad \Rightarrow \quad x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Notera att roten ovan kan vara både positiv och negativ! (*kvadraten får positivt tecken oavsett tecknet på högersidan om vi kvadrerar båda sidor*) Detta kan vi i sin tur skriva som

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Mao – vi har löst ut x! Notera att en andragradsekvation har 2 lösningar, eller inga (reella) lösningar om $b > a^2/4$ och det som finns innanför rottecknet är negativt. (Lösningarna är i så fall komplexa, vilket är en helt annan historia…)
Om ekvationen går att lösa (med reella tal), dvs om $b \le a^2/4$, så är lösningarna punkterna där kurvan $y = x^2 + ax + b$ (som är en parabel) skär x-axeln



Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218