Fysikpapper för N3 | Kvantfysik

Denna inledning till kvantfysiken går utanför det som boken redovisar och är menad att ge en grundläggande förståelse för vad kvantfysik verkligen är, och en vidare förståelse för de experiment och fenomen som beskrivs i boken. Denna text går djupare än vad som krävs – det räcker att klara övningsuppgifterna på sista sidan.

Egentligen beskrivs hela världen av kvantmekanik (kvantfysik). Det är bara det att i vår stora och komplexa värld så försvinner interferenseffekter och andra fenomen från kvantvärlden i det allmänna ”bruset”. Jämför med mönstret som skapas av en laserstråle som går igenom en dubbelspalt. Riktar vi flera lasrar mot samma spalt och bilderna överlappar så syns till slut bara en ensam ljusfläck. Interferenseffekterna har försvunnit.

Kvantisering

Vissa storheter är kvantiserade, till exempel laddning. Laddning kommer alltid i form av ett heltal elektroner – eftersom elektroner (så vitt vi vet) inte kan klyvas. Laddning är alltså kvantiserad – den finns bara som heltalsmultipler av elementärladdningen.
Kvantfysiken förutser att även många andra saker, som magnetiskt flöde, ström i ledare, ljus, ljud, mm är kvantiserade på ungefär samma sätt. Därav namnet *Kvantfysik*. Alltså finns det ett minsta magnetiskt flöde ”flödeskvanta”, en minsta ström i en ledare ”strömkvanta”, en minsta mängd ljus ”ljuskvanta” eller ”foton”, en minsta mängd ljud ”ljudkvanta” eller ”fonon”, mm.

Tillstånd

Kärnan i kvantfysiken är att alla partiklar, objekt, måste beskrivas av komplexa vågfunktioner. Sannolikheten för att finna partikeln i ett specifikt *tillstånd* ges av *absolutbeloppet i kvadrat av vågfunktionen* f(x,t) som motsvarar detta tillstånd.
Vad är då ett tillstånd (*state* på engelska)? Jo, tag tex. en välisolerad metallkula som kan laddas upp genom att man skjuter elektroner till den. Kulan kan då befinna sig i olika laddningstillstånd, med 1, 2, 3, 4, … extra elektroner. Laddningen på kulan ges alltså av kulans tillstånd $|n\rangle$, där n är antalet extra elektroner, dvs kulans laddning. Antalet tillstånd kulan kan vara i är oändligt – men tillstånden skiljs alltid åt av minst en elektronladdning.

Det är alltså viktigt med tillstånd inom kvantfysiken, eftersom bara vissa tillstånd är tillåtna. Dessa numreras vanligen, tex så att högre nummer har högre energi.

Vi kommer här endast att titta på bundna tillstånd, vilket innebär tillstånd som inte förändras med tiden. Laddningstillstånden ovan är ett bra exempel, om kulan är välisolerad.

Nu till det udda med kvantfysiken. Ett system kan faktiskt vara i två tillstånd samtidigt (vilket kallas för superposition). Kulan ovan kan alltså befinna sig i ett tillstånd med både 0 och 1 extra elektroner, samtidigt – även om kulan är helt isolerad (detta skrivs $a|0\rangle+b|1\rangle$, där a och b är komplexa tal. $|a|^2$ är sannolikheten att man mäter noll extra laddningar och $|b|^2$ sannolikheten att mäta en extra elektron på kulan). Så här kan det vara tills man går fram till kulan och mäter laddningen (tex. med en Coulomb-meter). Då måste systemet (kulan) bestämma sig, och man mäter antingen noll eller en elektroner på kulan. Sannolikheten för det ena eller det andra ges av absolutbeloppet i kvadrat av amplituderna a och b.
Man kan förutse sannolikheterna $|a|^2$ och $|b|^2$ mycket exakt, men det går aldrig att räkna ut om man skall få en elektron eller inte vid en specifik mätning!
Efter mätningen förblir systemet i sitt nya tillstånd. Mätningen har alltså påverkat systemet.

Vågfunktioner

Amplituderna i exemplet ovan är exempel på vågfunktioner, vars amplitud ger sannolikheten för ett visst tillstånd (om man tar *absolutbeloppet i kvadrat av vågfunktionen*). För partiklar

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

som kan röra sig i rummet men som ändå befinner sig i *bundna tillstånd* som inte beror av tiden bestäms amplituden, vågfunktionen, av Schrödingerekvationen,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}f(x)+V(x)f(x)=E_n f(x).$$

Detta är en andra ordningens differentialekvation där E_n är partikelns energi (om den befinner sig i ett visst tillstånd med index n), $\hbar$=6,5822x10^{-16}eVs (läses "hbar") är Planks konstant h delat med 2π (kallas även för Dirac's konstant) och *V(x)* är den potentiella energin för partikeln i punkten x. (*Ex: V(x)=mgxsin30 är den potentiella energin för en "partikel" i en 30 grader brant uppförsbacke).*
Vågfunktionen f(x) bestämmer sannolikheten att hitta partikeln i en viss position, dvs kurvan $P(x)=|f(x)|^2$ anger sannolikheten att hitta partiklen i punkten x. Det är viktigt att vågfunktionen normeras (divideras med en konstant) så att den totala sannolikheten i hela rummet att hitta partikeln för alla x blir ett.

För fria partiklar (som far runt i vacuum utan några andra laddningar i närheten) gäller att V(x)=0. Lösningen till Schrödingerekvationen är en våg, $f(x)=c(\cos kx+i\sin kx)=ce^{ikx}$, där $E=\hbar^2k^2/2m$ och c är en konstant. Notera att absolutbeloppet i kvadrat av denna funktion är $|c|^2$ överallt! Det är alltså lika sannolikt att hitta partikeln överallt i rummet. konstanten *k* kallas för "vågtalet" och bestäms av partikelns rörelsemängd

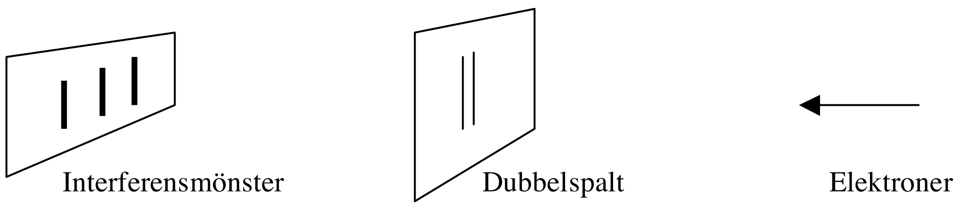
$$k=p/\hbar$$

och är även kopplad till vågens våglängd

$$\lambda=2\pi/k.$$

Dessa två små formler är mycket praktiska och berättar att en partikel både kan ha rörelsemängd och våglängd (eftersom partikeln måste beskrivas av en vågfunktion)! Vågor och partiklar är bara två olika sätt att se på samma sak.

Notera att eftersom partiklars positioner bestäms av vågfunktioner, som kan interferera med sig själva och med andra vågfunktioner (på samma sätt som tex ljud och ljus) så kan vi få interferensfenomen liknande de för ljus som passerar dubbelspalter, gitter, mm – med partiklar. Man kan faktiskt skicka tex elektroner en åt gången genom en dubbelspalt, och få ett interferensmönster på andrar sidan. (En elektron ger bara en prick på skärmen, men efter ett tag när många elektroner passerat dubbelspalten framträder ett mönster.) Det verkar alltså som om varje elektron går igenom *båda* spalterna samtidigt. Hur skulle den annars veta att den skall interferera med sig själv på andra sidan spalten? Detta är en av många skumma effekter av kvantmekaniken.



Det visar sig också att om vi verkligen mäter om elektroner väljer den ena eller den andra spalten så försvinner interferensmönstret. Vi kan alltså inte mäta något utan att störa systemet! Endast om vi låter elektronerna vara ifred under färden kan dom ta bägge spalterna samtidigt, och interferera med sig själva.

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

En partikel i en låda
Detta är ett enkelt exempel helt utan motsvarighet i naturen, men fysiken är exakt densamma som den i atomer och molekyler – så med hjälp av denna enkla modell kan vi förstå essensen av hur det fungerar i betydligt mer komplexa system. En partikel i en låda är helt enkelt en enkel, fyrkantig[1] *atom!*
Vi tänker oss en låda med längden *L* där en elektron kan röra sig helt fritt inne i lådan men studsar elastiskt mot alla lådans väggar. Ju högre energi elektronen har desto snabbare studsar den mellan väggarna. Klassiskt skulle elektronen kunna ha vilken hastighet som helst (eller ligga still någonstans på lådans botten), men kvantmekaniskt blir historien en helt annan!

Den potentiella energin som krävs för att ta sig över (igenom) lådans väggar sätter vi så pass hög att elektronen inte kommer ut. Vi kommer då att få ett antal *bundna tillstånd* i lådan, dvs kvantmekaniska tillstånd som elektronen kan befinna sig i, som är lokaliserade till lådan.

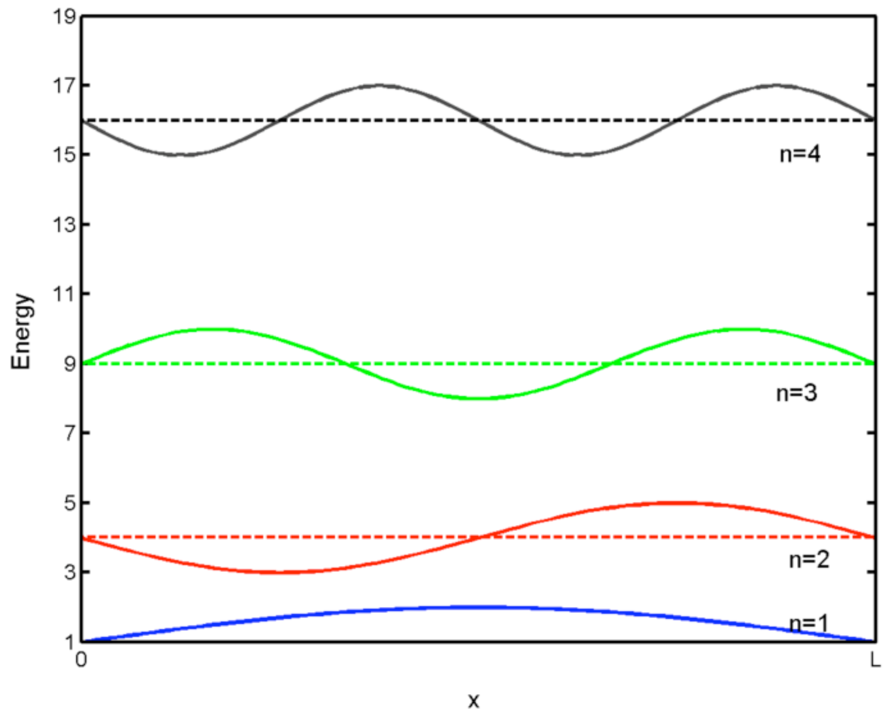
Problemet är exakt detsamma som för att bestämma den stående ljudvågen i en orgelpipa! Det måste vara en nod i båda kanterna för att man skall få en stående våg. Alltså måste

$$L = n\lambda/2,\ \ n = 1,2,3...$$

Elektronen kan alltså bara ha vissa bestämda våglängder. Sätter vi in dessa våglängder i formlerna för vågtalet k och energin ovan ser vi att *elektronen endast kan ha vissa bestämda energier*. Vi kallar dessa tillåtna energier för energinivåer. Dessa energinivåer bestäms exakt på samma sätt för elektronerna i en atom, eller protonerna i en kärna, osv. Enda skillnaden är att atomer inte är fyrkantiga lådor, vilket gör att energinivåerna hamnar lite annorlunda. Den enkla vågfunktionerna här blir istället 3-dimensionella, rundade vågor kring kärnan. Kemiboken kallar dessa för *orbitaler*.
Det lägsta tillståndet, n=1, kallas för grundtillståndet. Det är den lägsta energi elektronen kan ha, den kan alltså inte ligga still eller fastna i någon punkt! Av samma anledning fastnar inte elektronerna i en atom i kärnan, trots att dom dras dit pga plusladdningen.

[1] Vår låda här är endimensionell, vilket kanske känns lite overkligt. Vi får dock detta resultat även för en smal pipa, som en flöjt. I en tredimensionell låda måste man ha stående vågor i alla 3 riktningar (med ett index n_1, n_2, n_3 för varje riktning). Energin blir då summan av de stående vågornas energier i alla tre led. Lite krångligare, men inte så farligt mycket svårare…

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218



Bilden visar de första fyra vågfunktionerna för elektronen i vår låda. I grundtillståndet är det alltså sannolikast att hitta partikeln i mitten, medan elektronen är mer dragen åt kanterna för det första *exciterade* tillståndet. Med exciterad menas att detta tillstånd har högre energi. Energin är angiven i multipler av grundtillståndets (*n=1*) energi.

Excitationer och fotoelektrisk effekt

Det finns olika sätt att excitera elektronen i lådan, dvs få den att byta tillstånd. Tex kan vi sparka till lådan – dvs. tillföra energi. Eller så lyser vi på lådan med ljus, dvs fotoner. Fotonernas energi är $E = hf = \hbar\omega$, där f är frekvensen och $\omega = 2\pi f$ vinkelfrekvensen.

Om ljuset vi skickar in har exakt rätt frekvens så att dess energi motsvarar att elektronen i lådan kan hoppa från grundtillståndet till det första exciterade tillståndet – så kan fotonen absorberas av elektronen, som hoppar upp till det exciterade tillståndet. Motsvarar fotonens energi ett hopp flera energinivåer uppåt kan detta också ske. Elektronen i lådan kan även göra sig av med överskottsenergin genom att skicka iväg fotoner, och samtidigt hoppa nedåt till en lägre energinivå, vars frekvens kommer att motsvara exakt energiskillnaden mellan energinivåerna elektronen hoppade emellan.

Vi får då lådans spektrum. Varje tillåtet ”hopp” nedåt mellan energinivåer motsvarar en emitterad våglängd, dvs en linje i lådans spektrum.

Om vi tänker oss att alla fotoner härstammar från hopp mellan enereginivåer så är det inte så konstigt att ljus är kvantiserat – varje foton, ”ljuspaket”, motsvarar ett hopp mellan två energinivåer i en atom.

Fotoelektrisk effekt innebär att det absorberade ljuset utifrån är så energirikt att elektronerna helt enkelt slungas ut ur lådan (dvs *ut från atomerna*). Fotonens energi omvandlas då dels till ”utträdesarbete”, vilket motsvarar energin att lyfta elektronen från sitt bundna tillstånd ut ur lådan (vilket motsvarar den potentiella energin V att komma över lådans kant) och dels till rörelseenergi - som alltså kommer bero av det infallande ljusets frekvens.

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

Comptoneffekt – partikelegenskaper hos ljus.
Comptoneffekten är ett exempel på motsatsen till det vi diskuterat ovan. Ljus, som vanligen betraktas som en våg, måste ibland (speciellt vid höga energier, kort våglängd) betraktas som partiklar. Vad som händer i Comptoneffekten är att ljus krockar med materia av något slag, och sprids i en annan riktning. Samtidigt förändras ljusets våglängd – vilket inte kan förklaras om man bara ser ljuset som en våg som studsar mot föremålet, då borde våglängden vara densamma. Men, då ljuset även är en partikel, en foton, vars rörelsemängd ändras i stöten – så kan den också byta våglängd. Det står mer om detta i boken.

Spinn, Fermioner, skal, mm (bonus)
För att förstå atomer helt och fullt krävs ytterligare en hel mängd kvantfysik, vi tar det kortfattat här. Vår låda ovan är en mycket enkel atom, med bara en elektron (*inte helt olik en väteatom*). Elektroner är Fermioner, vilket är partiklar med mycket speciell symmetri. Man måste faktiskt rotera en elektron eller en proton 720 grader (*två varv*!) för att den skall se lika dan ut! Detta har två viktiga konsekvenser: för det första kan två elektroner/protoner inte dela tillstånd. Är grundtillståndet upptaget får nästa elektron snällt sätta sig i det första ej upptagna tillståndet.
För det andra kan Fermioner ha två olika *spinn* (”spinn upp” eller ”spinn ned”). Man kan jämföra elektronen med en liten magnet som antingen kan peka parallellt (med ett yttre fält) eller i motsatt riktning. Kvantfysiken tillåter endast dessa två riktningar, inget mittemellan.
Dessa två möjligheter gör att två elektroner kan sätta sig i lådans grundtillstånd, en med spinn upp och en med spinn ned. Även i nästa tillstånd finns plats för två elektroner.

I en atom med säg 14 elektroner får alltså elektronerna snällt sätta sig i allt högre tillstånd när de lägre är upptagna. Två hamnar i det lägsta s-skalet, 8 i p-skalet, osv. Att det inte blir två elektroner i varje skal beror på att det tillkommer ytterligare kvantisering. När en elektron roterar runt atomkärnan skapas ett magnetfält, dvs elektronens bana skapar en liten elektromagnet – som kvantmekaniken endast tillåter ha vissa bestämda riktningar och värden, närmare bestämt 4 olika värden för p-skalet. Energin för elektronerna blir även lite olika beroende på om deras spinn pekar i samma riktning eller i motsatt riktning mot magnetfältet som skapas av rotationen runt kärnan (kallas ban-kvanttalet). Detta gör att vi får flera energinivåer tätt ihop. Bilden blir nu fort ganska komplicerad, så vi stannar här. *Det står lite grann om detta i Nexus B, men det är inget ni måste kunna!*

Titta på planschen i fysiksalen över olika spektra. Varje linje motsvarar ett hopp mellan två energinivåer i en atom. Varje atom fungerar som en liten kvantlåda. Många linjer ligger parvis. Dessa kommer av hopp mellan en energinivå och energinivåer med olika spinn. Energinivåerna med olika spinn kan ha en smula olika energi pga ban-magnetfältet. Därför har linjerna lite olika våglängd.

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

Uppgifter

1. Antag att vi mäter laddningen på en liten metallkula till 50nC. Vilket antal *extra* elektroner på kulan motsvarar detta?
2. Antag att vi har satt en liten metall kula i tillståndet .3|0>+0.95|1>, där |n> är olika antal extra elektroner på kulan. Vilken är sannolikheten att vi mäter kulan som neutral? Vilken är sannolikheten för att vi mäter kulans laddning till noll om vi mäter igen?
3. En oladdad kula förs samman med en kula med en extra elektron. Kulorna för sedan isär. Vilket tillstånd har kulorna efter detta, innan vi mäter? Om vi sedan mäter en extra elektron på kula ett, vilken är då sannolikheten att hitta en extra elektron på kula nummer två? Fundera över vad detta innebär före och efter att vi mätt laddningen på kula ett.
4. Antag att elektroner med energin 10keV skickas mot en dubbelspalt med bredden 3nm. Elektronerna möter sedan en skärm 1m från spalten där de bildar ett interferensmönster. Beskriv detta!
5. En kristall fungerar ungefär som ett gitter om elektroner skickas mot den. Antag att vi mäter första maxima 1,2° ut från symmetriaxeln när vi skickar elektroner med energin 500keV mot en kristall. Vilken gitterkonstant motsvarar detta? (Detta motsvarar avståndet mellan atomerna i kristallen!)
6. Rita de 5 vågfunktionerna med lägst energi i en ”kvantlåda” med längd L., samt sannolikhetsfördelningen i lådan för respektive tillstånd.
7. Beräkna energinivåerna för vår låda (som funktion av n)! Antal att lådan har längden L. Dessa utgör lådans ”skal”.
8. Visa att energin för partikeln i lådan precis motsvaras av den klassiska formeln $E = \frac{mv^2}{2}$, där hastigheten v är kvantiserad (beror av n).
9. Antag att längden på lådan är 0,1nm. Vilken hastighet har elektronerna i grundtillståndet respektive det första exciterade tillståndet i lådan.
10. Hur ser funktionen V(x), dvs den potentiella energin, ut för vår låda om det krävs minst 10eV för att ta sig ur lådan.
11. Antag att längden på lådan är 1nm. Vilka våglängder finns i lådans spektrum? Är några synliga?
12. Antag att samma låda som ovan har kanter med den potentiella energin 10eV. Hur många bundna tillstånd har denna fyrkantiga atom? Antag att vi lyser på lådan med en lampa som avger ljus med våglängden 100nm. Vad händer? Vilken hastighet får elektronen när den far iväg upp ur lådan?
13. Antag att vi belyser samma låda med ljus med våglängden 137nm. Vilka frekvenser kan ljuset som skickas ut från lådan när elektronen faller tillbaka mot sitt grundtillstånd ha?
14. En laser fungerar som en ”låda” för ljus, med speglar i bägge ändar (varav den ena släpper igenom lite av ljuset). Vilka längder kan en laser som skall lysa med våglängden 400nm.
15. Lasern ovan är fylld med en gas där elektroner exciteras från sitt grundtillstånd till ett exciterat tillstånd av en blixtlampa. Vilken energiskillnad måste det vara till det exciterade tillståndet för att våglängden skall bli den rätta?
16. Hur många fotoner per sekund avger lasern ovan om dess effekt är 100W och verkningsgraden 0,1%?
17. Antag att vi stänger in en elektron i en skokartong som är 30cm på längden. Hur tätt ligger de lägsta energinivåerna? Vad händer om lådans bredd varierar en smula på olika ställen, tex mellan 30,1cm och 29,9cm? (Antag att det blir flera kvantlådor samtidigt i samma skokartong parallellt med varandra). Hur kan man tolka resultatet?

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

Facit (med viss risk för fel)

1. $3{,}1 \times 10^{11}$
2. först 0,09 sen 1.
3. Före mätningen är sannolikheten 0,5 och efter mätningen exakt noll. Information om att den ena mätningen ägt rum måste alltså ha färdats (på nolltid!) till den andra kulan. Detta kallas ”teleportation”.
4. Det bör bli ca 4mm mellan linjerna, använd dsin(v)=nh/p.
5. Ca 0,8Å, samma formel som ovan. Kanske bör man räkna relativistiskt här??
6. Sannolikhetsfunktionerna skall ha 1-5 pucklar, och alltid vara noll i kanten.
7. k=nπ/L, $E = \hbar^2 k^2 / 2m = \hbar^2 \pi^2 n^2 / (2mL^2)$
8. Sätt in p=mv i formeln för energin ovan.
9. n*3,6Mm/s (n=1,2,…)
10. $V(x) = \begin{cases} 0, & om\ 0 < x \le L \\ 10eV & annars \end{cases}$
11. 1100nm, 660nm, 412nm. …
12. 100nm-fotoner har energin E=12,4eV. Hastigheten ($E_k = E - E_{grundtillst} - 10eV = 2{,}0eV$) blir 840km/s
13. 137nm motsvarar excitation till 5:te tillståndet (n=5). Spektrat i uppg 10 för n=1 till n=5 kan fås ut (alla kombinationer).
14. $L = n\lambda / 2$ (n kan vara stort)
15. $\lambda = hc / \Delta E$, energiskillnaden skall vara 3,10eV.
16. $2{,}0 \times 10^{17}$
17. 4×10^{-18}eV (en mycket liten energi). Tillstånden ligger alltså mycket tätt. Varierande bredd och ojämnheter gör att ännu fler energinivåer skapas i lådan. Resultatet blir i praktiken att alla energier blir tillåtna – lådan kan behandlas klassiskt!

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218