Fysikpapper för N3 | Kvantfysik II

Denna text förklarar lite mer av bakgrunden bakom vad som står i er bok och i Nexus. Det finns bra uppgifter i Nexusboken som ni får kopior på.

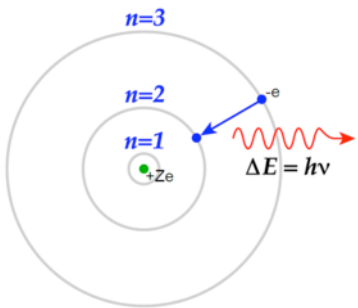
Energinivåer och emittion/absorbtion av fotoner

Som det stod på det förra pappret så kan elektroner i en atom och partiklar i en "låda" bara anta vissa energier. Energin är kvantiserad!
En elektron kan byta energinivå genom att absorbera eller emittera (avge) en foton så att energiskillnaden mellan tillstånden som elektronen hoppar emellan precis motsvarar fotonens energi $\Delta E = hf$, där f är fotonens frekvens.

Väteatomens spektrum (Bohrs atommodell)

I början av 1900-talet när kvantfysiken var i sin linda kom Niels Bohr på en enkel lösning på hur man skulle kunna beräkna energinivåerna (spektrat) hos en väteatom. Lösningen är inte exakt, *och det går utmärkt att lösa Schrödingerekvationen för väteatomen på ungefär samma sätt som för vår "partikel i låda". Det blir bara allt för krånglig matematik för denna kurs.* Bohrs modell ger dock huvudstrukturen i spektrat på ett enkelt och tydligt sätt.

Bohr antog (helt korrekt och analogt med "partikeln i lådan") att elektronen runt en vätekärna bara kan ha stabila banor om banans omkrets är ett heltal elektronvåglängder,



$$n\lambda = 2\pi r. \quad (1)$$

Elektronens våglängd ges av de Borglies ekvation (från förra pappret, Kvantfysik I):

$$\lambda = 2\pi / k = h / p = h / mv \quad (2).$$

Antagandet är mycket likt villkoret för stående vågor i vår "partikel i låda"!

Energin för elektronen i sin bana runt vätekärnan, om denna antas stå still då den är ca 1000ggr tyngre än elektronen), är

$$E = E_k + V \quad (3),$$

där $E_k = mv^2/2$ är den kinetiska energin och $V = -kq_e^2/r$ är den potentiella energin för elektronen pga Coulombkraften från protonen i kärnan kärnan (*vi har inte använt denna formel tidigare – men så här är den i alla fall*). Konstanten k är samma som i Coulombs lag.

Om elektronens bana är cirkulär så måste Coulombkraften vara lika med Centripetalkraften på elektronen,

$$\frac{kq_e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (4).$$

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

Nu har vi allt vi behöver för att räkna ut energin för elektronen i sin bana. En inte allt för svår (prova!) härledning ger

$$E_n = -\frac{mk^2q_e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{mq_e^4}{8n^2h^2\varepsilon_0^2} = -(13.6eV)\cdot\frac{1}{n^2} \qquad (5),$$

där $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Se formelsamlingen.
Notera att n^2 här står i nämnaren och inte i täljaren som för partikeln i lådan. Att energin är negativ härrör från att vi räknar med negativ potentiell energi – elektronen får positiv (*rörelse*)energi när den frigjorts från kärnan (fotoelektrisk effekt) . Detta kräver en foton med minst 13.6eV om elektronen befinner sig i grundtillståndet!

Formeln (5) för energin är nu inte helt exakt, eftersom andra effekter i atomkärnan kommer in (tex spinn, ban-kvanttal, mm), men huvuddragen är okej!
Se http://en.wikipedia.org/bohr_model för mer detaljer.

Osäkerhetsrelationen (Heisenbergs osäkerhetsrelation/obestämdhetsrelation)
Denna kända relation är en direkt följd av att partiklar beter sig som vågor och vice versa. Det finns många osäkerhetsrelationer, men de mest kända är för läge och rörelsemängd, samt för tid och energi.
Osäkerhetsrelationerna för läge-rörelsemängd och tid-energi är

$$\begin{aligned}\Delta p\cdot\Delta x &> \hbar/2 \\ \Delta E\cdot\Delta t &> \hbar/2\end{aligned} \qquad (6).$$

Här betyder ”Δp” osäkerheten vid bestämning av p, osv. Det finns flera följder av dessa relationer. En är att det inte går att bestämma en partikels läge och hastighet samtidigt. Tar du reda på var den är med stor exakthet så kommer du inte att ha en aning om vilken hastighet den får. En annan följd, av den andra relationen, är att det går att ”låna” energi av naturen under mycket kort tid, ju kortare tid destå mer energi. Detta gör att partiklar kan tas sig över ett hinder trots att de egentligen inte har nog med energi för detta. Tänk dig att du skall knuffa en lådbil över en kulle, men att rörelseenergin inte räcker till för att komma över lägesenergin på toppen av kullen. I kvantmekaniken kan du ibland lyckas få över bilen i alla fall! Naturen låner helt enkelt energi under den (korta!) tid det tar att ta sig över kullen, och lämnar tillbaka den efteråt. Allt i överenstämmelse med osäkerhetsrelationen. Detta kallas för *tunnling*.

Vi kan göra en enkel (*populärvetenskaplig*) ”härledning” av osäkerhetsrelationen för läge vs. rörelsemängd.
Antag att vi vill bestämma positionen hos en elektron genom att lysa på den med en laser och se vad som reflekteras, det är ett ganska bra sätt. Men, vi kan bara bestämma läget på storleksordningen en våglängd när, alltså väljer vi en kortare våglängd och högre energi hos ljuset. Antag att vi skickar en foton mot elektronen med energin $E_\gamma = hc/\lambda_\gamma$ och rörelsemängden $p_\gamma = h/\lambda_\gamma$. Ungefär dubbla denna rörelsemängd kommer överföras till elektronen när fotonen reflekteras, men vi vet inte i vilken

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

riktning elektronen sedan far. Alltså är $\Delta p \approx h/\lambda_\gamma \approx h/\Delta\lambda$, där Δp är osäkerheten i rörelsemängd för elektronen och $\Delta\lambda$ osäkerheten i elektronens läge. Eftersom h är större än $\hbar = h/2\pi$ så är osäkerhetsrelationen uppfylld.

Exempel: studera lösningen till Schrödingerekvationen på första pappret där V(x)=0 överallt (fri partikel). Här är partikelns hastighet exakt bestämd (vågtalet *k ger p ger v)* men läget är fullständigt obestämt (det är lika stor sannolikhet att hitta vågen överallt)! Detta är ett vanligt förekommande specialfall.

Det går att konstruera "vågpaket", dvs vågor där partikelns läge är bättre bestämt, men då måste fler våglängder samverka vilket ökar osäkerheten i hastighet. Mao. genom att låta flera vågor med olika vågtal k interferera kan vi få en våg där sannolikheten att hitta partikeln är lokaliserad till ett kort område. (Endast för den som är mer intresserad av ämnet.)

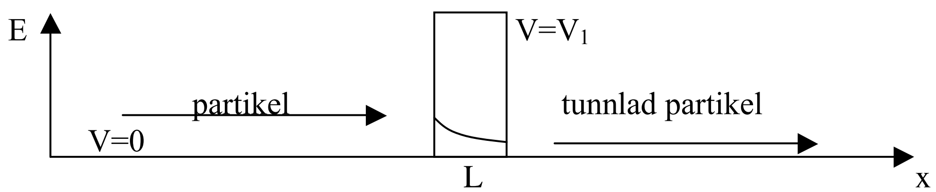
Det finns en lång och avancerad artikel på Wikipedia för den som är intresserad, se http://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

Tunnling

Tunnling kan dels tolkas som att en partikel kan "låna" energi för att ta sig över annars omöjliga hinder, fast detta är bara en populär förklaring. Vi kan härleda tunnling på riktigt med hjälp av Schrödingerekvationen. detta är inte svårt men kräver komplexa tal, och ingår bara som "bonus" i kursen. Det är en utmärkt tillämpning av komplexa tal i verkligheten!

Studera en partikel, tex. en elektron, som rör sig i en konstant potential (dvs den potentiella energin är densamma överallt). Lösningen är då en plan våg, vilket vi härledde på det förra pappret. $f(x) = ce^{ikx} = c(\cos kx + i\sin kx)$, där c är en komplex konstant och $i = \sqrt{-1}$. Vidare är $k = \sqrt{2m(E-V)}$, viket får genom att lösa ut k ur uttrycket för partikelns energi.

Vad händer nu om vi låter partikeln möta ett hinder i form av en "mur", dvs den potentiella energin höjs under en kort sträcka L över partikelns energi.



Jo, ekvationen för vågtalet $k = \sqrt{2m(E-V)}$, där nu V>E, blir imaginär!

$$k = \sqrt{2m(E-V)} = \sqrt{-1 \cdot 2m(V-E)} = i\sqrt{2m(V-E)} = ik_1.$$

Sätter vi in detta imaginära vågtal i vågfunktionen *f(x)* får vi

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218

$f(x) = ce^{ikx} = ce^{-k_1 x}$,

där $k_1 = \sqrt{2m(V-E)}$ är reell (notera att $i^2=-1$). Vågfunktionen finns alltså kvar inne i hindret, och det finns alltså även en viss (om än expotentiellt avtagande) sannolikhet att hitta partikeln inne i hindret! En viss del av denna sannolikhet fortsätter ut på andra sidan hindret, där vågfunktionen ser ut som innan. Passar man ihop dessa vågfunktioner så får man en bild av att elektronen kan tunnla, dvs hoppa igenom hindret, med sannolikheten $P_{tunnling} = e^{-2k_1 L}$ och fortsätta på andra sidan. Ju högre potentiell energi på barriären, destå lägre sannolikhet att tunnla (om inte partikelns egen energi är nästan lika hög).

Se även Nexus B kap 5 ”Vågor och partiklar”, med övningsuppgifter.

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn@kitas.se
031-825218