

Fysik för N1 | Om ideala gaslagen

Den ideala gaslagen, $pV=nRT$, och temperatur (läs igen: vad **är** temperatur?) introduceras oftast på gymnasiet utifrån hur gaser/vätskor betar sig, helt utan koppling till den fysik (mekanik) som vi redan gått igenom. Här skall jag istället definiera temperatur och härleda den ideala gaslagen utifrån hur partiklarna som gasen består av betar sig. Vi nosar då på en mycket stor fysikgren: statistisk fysik (läses ibland "sadistisk fysik") vilken behandlar system (tex behållare) med så många partiklar att man bokstavligen inte orkar räkna ut hur varje partikel rör sig, utan måste räkna på hur de betar sig i allmänhet.

Detta papper är för dig som vill ha lite mer förståelse än boken ger, det är inget absolut måste.

Gas, flytande och fast

Kortfattat betar sig molekylerna i en gas sig som små studsballar som far runt och studsar mellan väggarna om de stängs in i en behållare. De krockar såklart även med varandra, men så pass sällan att de ändå flyger fritt större delen av tiden. Detta kräver att molekylerna i behållaren inte är allt för många (i förhållande till volymen), men om atomernas hastigheter är höga orsakar de ändå ett nämnvärt tryck mot väggarna.

En vätska består av molekyler med lägre hastighet (och rörelseenergi). De ligger nära varandra och liksom glider runt, lite som bollarna i Ikeas bollhav. Molekylerna har inte energi nog för att "skaka sig loss" från de andra och flyga iväg själva, men de kan glida runt som de vill. Precis vid en vätskas yta kan dock molekyler komma loss, vilket gör att vätskan sakta förångas.

Ett fast ämne består av molekyler eller atomer som sitter bundna i ett fast mönster, en kristall. Varje atom eller molekyl kan skaka och snurra, den behöver alltså inte vara helt stilla, men har inte energi nog att flytta sig.

Kan du utifrån denna enkla beskrivning tänka dig varför gaser, vätskor och fasta material har de egenskaper de har?

Temperaturen i en ideal gas

Nu blir det mer spännande. Tänk att vi studerar en specifik atom i en gasbehållare. Det blir enklast om vi tittar på (klotrunda) atomer, som då betar sig som vanliga studsballar. Vi antar att det finns få andra atomer i närheten så chansen att krocka är liten. Vi antar även att gasen är i jämvikt, dvs. att atomerna rör sig med samma medelhastighet i alla delar av behållaren (temperaturen och tätheten är samma i hela behållaren). Vår atom kommer då (nästan) bara att krocka med behållarens väggar.

Vår atom kommer naturligtvis att ha en viss rörelseenergi

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

där m är partikelns massa och v är *beloppet* av dess hastighet (dvs. storleken på hastigheten oavsett vilken riktning atomen är på väg åt, mao. storleken på hastighetsvektorn).

Om vi nu studerar en atom i mängden (miljarders miljarder...) så kan vi använda medelhastigheten hos partiklarna och medel-rörelseenergin för att beskriva den, även om enskilda atomer kan ha mer och andra mindre!

Jonn Lantz

Din fysiker i frontlinjen

info@ilv.se 031-825218

RMS – medelhastighet i flera dimensioner

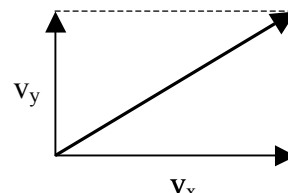
Nu när vi skall räkna på en medel-atom så måste vi beräkna medelvärdet av hastigheten för alla atomer som rör sig i lådan. Detta kräver en smula matematik.

Vill vi ha medel-rörelseenergin för atomerna så måste vi beräkna *medelhastigheten oavsett atomernas rörelseriktning*. Medelhastigheten totalt är naturligtvis noll om bitittar på en stillastående behållare med gas!

För att beräkna storleken på hastighetsvektorn, oavsett riktning, så kan vi använda Pythagoras sats:

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$, om partikeln rör sig i ett plan. Notera att

v^2 är alltid positiv! (Rör sig partikeln i 3 dimensioner blir det $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, vilket du kan bevisa själv.)



Nu beräknar vi medelvärdet: $v_{RMS}^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2$, för N atomer. Roten av detta är ett mycket bra mått på medelhastigheten oavsett riktning $v_{RMS} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}$, vilket också förklarar namnet på detta medelvärde: RMS står för "Root Mean Square", dvs roten ur medelvärdet av kvadraterna. Notera att v_{RMS} är ett tal, ett medelvärde, och inte en vektor!

Alltså har vi att

$$E_{medel} = \frac{mv_{RMS}^2}{2}, \quad (2)$$

där partiklarnas medel-rörelseenergi $E_{medel} = E_{tot} / N$ och E_{tot} är den totala rörelseenergin för N stycken atomer.

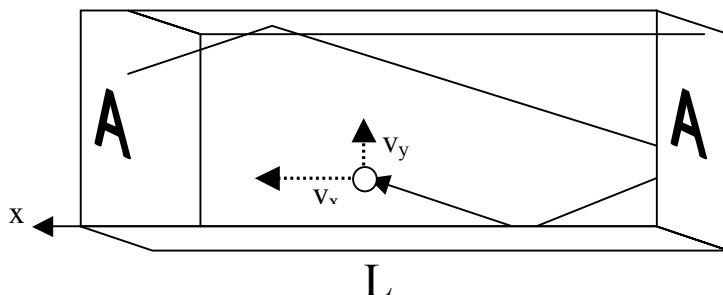
Nu tar vi helt sonika och **definierar** gasens **temperatur** som ett mått på medel-rörelseenergin hos varje partikel i gasen:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{mv_{RMS}^2}{2}, \text{ eller om vi flyttar om: } T = \frac{mv_{RMS}^2}{3k}. \quad (3)$$

Här är T temperaturen i enheten Kelvin ($0^\circ\text{C} = 273.15\text{K}$). Notera att vid $T = 0\text{K} = -273.15^\circ\text{C}$ så måste alla atomer ligga stilla¹ (oavsett vilket ämne det rör sig om)! Detta förklarar även varför det är omöjligt med lägre temperaturer än 0K .

Konstanten $k = 1.38066 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$ behövs eftersom vi vill mäta temperaturen i grader och inte i Joule. Den kallas för Boltzmanns konstant och anger hur stor ändring i partiklarnas medel-rörelseenergi som en grad innebär. Faktorn $3/2$ är bara till för att det skall bli snyggt på slutet, som vi skall se.

¹ Vilket de faktiskt inte gör, men det är en annan, kvantmekanisk, historia.



Nu skall vi ta reda på vilket tryck som atomerna som far omkring orsakar på behållarens väggar. Anta att vi har en lådformad behållare med plana väggar. Som figuren ovan visar har lådans kortsidor arean A samt långsidan längden L . Varje gång atomen studsar mot kortsidan så utdelar den under en kort tid en kraft på väggen. Nu är frågan hur ofta detta sker och hur stor kraften på väggen blir?

Notera att det bara är partikelns hastighet längs med långsidorna (x -axeln i figuren) som spelar roll. Vi kallar denna v_x . När partikeln studsar betyder detta att den på kort tid accelererar från hastigheten v_x (i riktning mot väggen) till den nya hastigheten $-v_x$, bort från väggen. Stöten är elastisk, atomen byter bara riktning. Accelerationen blir då

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_x - (-v_x)}{\Delta t} = \frac{2v_x}{\Delta t}, \quad (4)$$

där Δt är tiden som själva stöten tar. Kraften på väggen blir då $F=ma$, enligt Newton, och trycket på kortsidan blir då

$$p_1 = \frac{F}{A} = \frac{m2v_x}{A\Delta t}. \quad (\text{testa själv att sätta ihop denna formel!}) \quad (5)$$

Detta är alltså (medel)trycket från *en enda partikel* som studsar en gång under tiden Δt . Nu är frågan hur ofta atomen studsar mot denna vägg? Eftersom vi har hastigheten i x -led, v_x , och längden på lådan, L , så kan vi lätt beräkna tiden det tar för atomen att färdas fram och tillbaka mellan lådans två kortsidor. Notera att eftersom vi antar att partiklarna aldrig kolliderar och kollisionerna med väggarna alltid är elastiska så kommer denna tid alltid att vara densamma! Mellan varje studs mot ena kortsidan måste atomen färdas fram och tillbaka, dvs. sträckan $2L$. Detta tar då tiden $\Delta t=2L/v_x$. Sätter vi in denna tid i formeln ovan får vi

$$p_1 = \frac{mv_x^2}{AL}. \quad (6)$$

Notera att behållarens volym är $V=AL$. Nu måste vi beräkna medelvärdet på v_x^2 för alla atomer i gasen, så vi kan få medelvärdet över tiden på trycket p . Medelvärdet av rörelseenergin för atomerna är

$$E_{medel} = \frac{mv_{RMS}^2}{2} = \frac{m}{2}(v_{RMS(x)}^2 + v_{RMS(y)}^2 + v_{RMS(z)}^2) = E_{medel(x)} + E_{medel(y)} + E_{medel(z)} \quad (7)$$

Där $E_{medel(x/y/z)}$ är medelvärdet av atomernas rörelseenergi i en viss riktning. *Tänk igenom detta resonemang - använd Pytagoras sats!*

Jonn Lantz

Din fysiker i frontlinjen

info@ilv.se 031-825218

Då atomernas rörelseriktningar är helt slumpmässiga, så måste medel-rörelseenergin vara lika i alla riktningar, $E_{medel(x)} = E_{medel(y)} = E_{medel(z)}$, vilket i sin tur ger att $E_{medel(x)} = E_{medel} / 3$, vilket även ger att $v_{RMS(x)}^2 = v_{RMS}^2 / 3$. Detta² sätter vi in i ekvation 6, vilket ger

$$p_{1,medel} = \frac{mv_{RMS}^2}{3V}, \quad (8)$$

där det nu är underförstått att vi menar *medelvärdet över tiden av trycket från en enda atom*. Vi har nu N stycken atomer i behållaren så det totala medeltrycket från alla atomer i behållaren, som är det tryck vi känner, blir

$$p = N \frac{mv_{RMS}^2}{3V}. \quad (9)$$

Jämför denna ekvation med ekvation 3. De är ganska lika! Löser vi ut faktorn $mv_{RMS}^2 / 3$ ur båda ekvationerna och sätter dessa lika med varandra får vi direkt

$$pV = NkT, \quad (10)$$

Vilket är den ideala gaslagen! (*Gör gärna denna sista räkning själv!*) Denna går också att skriva som

$$pV = nRT, \quad (11)$$

där n är antalet mol och konstanten $R = 8.31451 \text{ J/mol K}$. Notera att en mol bara är en förkortning för $N_A = 6.02214 \cdot 10^{26}$ atomer (Avogrados konstant), så omskrivningen är mycket enkel. *Nu har vi härlett den ideala gaslagen för runda atomer som inte växelverkar i en gas i jämvikt! I verkligheten krockar atomerna med varandra även i gaser, men ideala gas"lagen" är ändå en helt okej approximation i många fall.*

Vi kan nu även visa några följder av den ideala gaslagen. Anta att vi ändrar volymen på vår behållare men håller temperaturen konstant. För båda volymerna måste gaslagen gälla: $p_1 V_1 = nRT$ och $p_2 V_2 = nRT$. Alltså gäller

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}. \quad (12)$$

På samma sätt kan vi visa att om vi ändrar temperaturen eller trycket men håller volymen konstant så gäller (*visa detta!*)

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (13)$$

Slutligen kan vi hålla trycket konstant samt variera temperaturen eller volymen. Vi får

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2}. \quad (14)$$

² Notera att detta leder till att ideala gaslagen ser olika ut, dvs gaser beter sig olika, i 2-dimensioner, eller i 4 dimensioner. *Kan du lista ut hur den ser ut för en 2-dimensionell gas?*