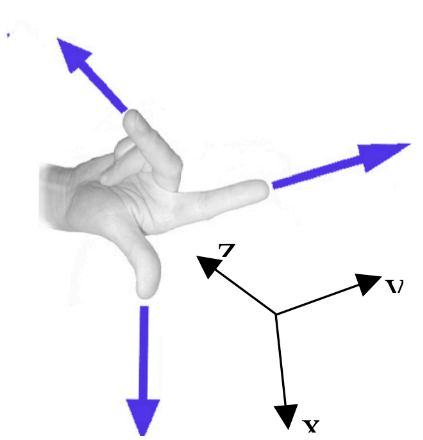
Fysikpapper för N2 | Vektorer, koordinatsystem och rörelse

Kompletterande material till boken och sammanfattning av vad som är viktigt.

Kartesiska koordinater

Det finns flera sätt att ange positionen av ett föremål. Man kan tex ange i vilket väderstreck det befinner sig, hur långt bort och hur högt över marken. Naturligtvis måste även denna position anges relativt något – i exemplet ovan är det antagligen relativt den som pekar. Detta kallas för **referenssystem**. Det matematiskt enklaste sättet att beskriva lägen i ett referenssystem är med hjälp av så kallade **kartesiska koordinater** (x,y,z).



Kordinatsystemet består då av 3 vinkelräta axlar (i x-led, y-led och z-led). Om vi bara intresserar oss för två led, som på en karta, räcker det med två axlar (tex: x-led och y-led).

Man brukar ordna axlarna som bilden till höger visar, efter fingrarna på **högra handen**.

Nu är det enkelt att ange positionen för ett föremål, i förhållande till den punkt koordinataxlarna möts (x=0,y=0,z=0), **Origo**. Var Origo placeras, och vart axlarna pekar (i det verkliga rummet), bestämmer du själv, men det måste naturligtvis framgå om du skall beskriva något!

Koordinatsystem är lika viktiga för att **ange riktningar**, tex. vart vinden blåser. Här är det inte så viktigt var Origo ligger men desto viktigare vart axlarna pekar. Pekar vi tex. högertummen ovan mot norr och vinden blåser mot norr så kan vi säga att vinden blåser i positivt x-led.
Notera att det är väldigt praktiskt att sätta sitt koordinatsystem så att det man studerar rör sig längs någon axel, så länge det är möjligt.

Vektorer

När vi anger värden på företeelser i naturen omkring oss så kan dessa delas in i två grupper, vektorer och skalärer (tal).
Vektorer har storlek och riktning. Till exempel är hastighet en vektor. Acceleration är en vektor, kraft likaså, och många andra storheter.
Skalärer har bara storlek. Till exempel så är temperatur en skalär, den har ingen riktning. Energi är en annan skalär. Skalärer är alltså vanliga reella tal.

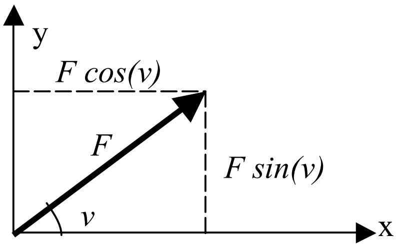
Olika sätt att skriva vektorer

För att göra detta måste vi först ha ett koordinatsystem. Vektorn skall ha en längd och en riktning.

Ex: Vektorn $\vec{F}$ (pilen ovanför markerar att det är en vektor och inte en skalär) har *längden F* och är riktad vinkeln *v* från x-axeln.

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn.lantz@lme.nu
031-825218

Om man skall räkna med vektorn $\vec{F}$ finns ett par olika sätt att skriva:



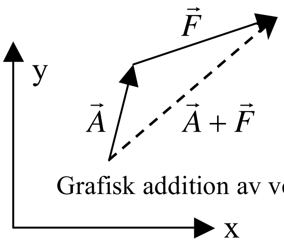
1. I matteböcker används ofta notationen
$\vec{F} \quad = \quad (F\cos(v), F\sin(v))$
Dvs, man delar upp vektorn i x-komponent och y-komponent och skriver vektorn som (*längden i x-led, längden i y-led*). Vektorns längd F fås då med Pytagoras sats. Ex: En vektor $\vec{A} = (a,b)$, dvs med komponenterna a och b, har längden $A = \sqrt{a^2 + b^2}$
Notera att längden F alltid är positiv! Detta sätt att skriva är enkelt och korrekt.

2. Gymnasiefysikböcker använder ofta en förenklad notation (*som dock lätt kan ge tex. teckenfel ibland*). $\vec{F}$ anges då *endast* med sin längd F. Riktningen på $\vec{F}$ anges genom att man beskriver vart den pekar, eller ritar en pil i en figur. Notera att längden på en vektor alltid måste vara positiv. Notera även att denna teknik bara fungerar bra om det är solklart vart vektorn pekar, dvs tex. att den pekar längs någon koordinataxel.

3. (*Frivilligt, men ganska användbart*) I högre studier använder ofta man något som heter *basvektorer* för att skriva vektorer. En basvektor har alltid längden 1. I ett kartesiskt koordinatsystem passar det bäst att ha 2 basvektorer, en i x-led och en i y-led. Man skriver ofta dessa som:
$\hat{x} = (1,0)$
$\hat{y} = (0,1)$
dvs, $\hat{x}$ har längden 1 och pekar i x-led, samt $\hat{y}$ har också längden 1 och pekar i y-led. ”Hatten” på basvektorerna, $\hat{x}$, anger att det just är basvektorer med längd 1 och inte vanliga vektorer. Basvektorer är bara användbara till att ange vart vektorer pekar. Med hjälp av dessa basvektorer kan vi skriva vektorerna ovan som:
$\vec{F} = F\cos(v)\hat{x} + F\sin(v)\hat{y}$
$\vec{A} = a\hat{x} + b\hat{y}$

Notera att alla dessa sätt är rätt, välj själv och använd gärna olika vid olika tillfällen!

Addition av vektorer
kan göras analytiskt (dvs mha räkning) eller grafiskt. Om vi adderar vektorerna ovan så blir summan:



Grafisk addition av vektorer

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= (F\cos(v), F\sin(v)) \\ \vec{A} &= (a,b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{F} + \vec{A} = (F\cos(v) + a, F\sin(v) + b)$$

Alltså är det helt enkelt att addera x-komponenterna för sig och y-komponenterna för sig! Med basvektorer ser additionen ut som följer:

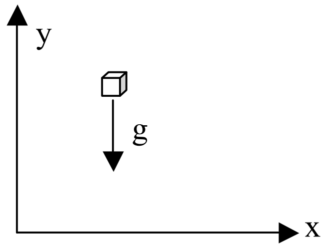
$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= F\cos(v)\hat{x} + F\sin(v)\hat{y} \\ \vec{A} &= a\hat{x} + b\hat{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{F} + \vec{A} = F\cos(v)\hat{x} + F\sin(v)\hat{y} + a\hat{x} + b\hat{y} = (F\cos(v) + a)\hat{x} + (F\sin(v) + b)\hat{y}$$

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn.lantz@lme.nu
031-825218

Ekvationer för rörelse med konstant acceleration
Detta kallas ofta för ”fritt fall”, men ekvationerna funkar i alla fall när det handlar om konstant acceleration, tex i modeller av joggare, cyklar och bilar som accelererar, etc. Härledningen har vi gått igenom på lektion, se anteckningar.

Ex: Antag att ett föremål befinner sig i ett kartesiskt koordinatsystem (x,y), där x-axeln är horisontell och y-axeln pekar uppåt. Befinner vi oss på jordens yta så finns det en konstant **tyngdacceleration** g=9,81m/s^2. Denna pekar i negativt y-led. Accelerationen i x-led är såklart noll.



Accelerationen har en riktning och är alltså en vektor, som kan skrivas på följande sätt:
1. Vi kan skriva $\vec{a} = (-g,0)$.
2. (Se bilden t.h. där pilen pekar nedåt och längden på vektorn är g)
3. $\vec{a} = -g\hat{y}$ (dvs, längden g och riktning i negativt y-led)
Använd det sätt du tycker funkar bäst! *Notera också att både hastigheten och föremålets läge är vektorer!*

Vi bortser från ev. luftmotstånd. Som visat tidigare kan föremålets rörelse beskrivas med formlerna
$v_y(t) = v_0 + at$,
dvs hastigheten i y-led (*som funktion av tiden*) är begynnelsehastigheten v_0 plus accelerationen gånger tiden. Formeln anger alltså hastigheten i y-led relativt Origo.
$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$,
ger på samma sätt läget i y-led som funktion av tiden. y_0 är då startläget i y-led = starthöjden.
Nu gör vi ett enkelt exempel! Antag att $v_0=0$ och att starthöjden är $y_0=h$. Sätt även in att accelerationen är $a_y=-g$. Då blir ekvationerna enklare:
$v_y(t) = -gt$
$y(t) = h - \frac{gt^2}{2}$,
Efter hur lång tid når föremålet marken (x-axeln)?
Svar: $y(t) = 0 = h - \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, (notera att t måste vara positiv!)
Vilken hastighet slår föremålet i marken med?
Lösning: $v_y(t) = -gt \quad = \quad -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$.
Svar: $\vec{v} = -\sqrt{2gh}\,\hat{y}$ (hela vektorn), eller $v_y = -\sqrt{2gh}$ (y-komponenten av vektorn), eller $v = \sqrt{2gh}$ nedåt (dvs längden på vektorn och dess riktning).

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn.lantz@lme.nu
031-825218

Svårare exempel
Antag att accelerationen är densamma men att begynnelsehastigheten i y-led är positiv! Antag även, för enkelhets skull, att starthöjden är noll ($y_0=0$).

Ekvationerna som beskriver föremålets rörelse blir då:

$$v_y(t) = v_0 - gt, \qquad (1)$$

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

Det är klart att föremålet, så länge $v_0>0$, först kommer röra sig uppåt samtidigt som det *bromsas in pga tyngdaccelerationen*, tills det till slut tappat all hastighet uppåt och vänder nedåt igen.
Detta skall du efter denna kurs kunna se direkt i ekvationerna ovan ☺.

Hur långt upp når föremålet om v_0=3m/s? När landar det igen?

Lösning: På toppen av banan måste hastigheten vara noll. Vi kan räkna ut *när* detta händer med ekvation (1) ovan, $v_y(t) = 0 = v_0 - gt_{topp} \quad \Rightarrow \quad t_{topp} = \frac{v_0}{g}$.
Sen är det bara att sätta in denna tid i ekvation (2):

$$h = y(t_{topp}) = v_0 t_{topp} - \frac{g t_{topp}{}^2}{2} \quad = \quad v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g}$$

Svar: föremålet når höjden $h = \frac{v_0^2}{g}$. Sätter vi in siffror får vi $h = \frac{3^2}{9.8} \approx 0{,}9m$

När dimper föremålet ner igen?
Nu kan vi använda att det måste ta lika lång tid upp till vändläget som ner igen. Hela flygtiden blir alltså helt enkelt $t_{flyg} = 2t_{topp} = \frac{2v_0}{g}$.
Ett marginellt krångligare sätt att lösa samma problem är att räkna ut när ekvation (2) ovan skär x-axeln (dvs när $y(t)=0$).

$$y(t) = 0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad = \quad t(v_0 - \frac{gt}{2}) \ .$$

En lösning till ekvationen är trivial, $t=0$. Detta är naturligtvis tidpunkten då rörelsen startar. Den andra lösningen är just $t = \frac{2v_0}{g}$, dvs flygtiden.
Sätter vi in siffror får vi: $t_{flyg} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 3}{9{,}8} \approx 0{,}6s$

Jonn Lantz
Din fysiker i frontlinjen
jonn.lantz@lme.nu
031-825218